

Table des matières

Chap 1 : Séries	1
I Comment déterminer la convergence d'une série	1
I.1 Si les termes sont de signe constant (à partir d'un certain rang)	
$((u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$	1
I.2 Si les termes sont quelconques	2
II Comment trouver la somme totale d'une série convergente	3
III Comment déterminer la divergence d'une série	4
III.1 Si les termes sont de signe constant	4
III.2 Si les termes sont quelconques	4
IV Que faire si on me demande d'étudier la nature d'une série ?	5

On se donne dans cette section une série $\sum u_n$ où $u_n \in \mathbb{K} \forall n \in \mathbb{N}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.)

I Comment déterminer la convergence d'une série

I-1 Si les termes sont de signe constant (à partir d'un certain rang) $((u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$

Méthode 1:

Comparaison du terme général à celui d'une série convergente

- Si les termes sont positifs

Rappel : Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que, à partir d'un certain rang, on a

1 ■ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont **positives**

2 ■ et $u_n \leq v_n$.

alors :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge.}$$

Montrer que la série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge.

On peut montrer (par télescopage) que la série $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k(k-1)}$ converge.

De plus, on a

$$0 \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} \quad \forall k \geq 2$$

Par critère de comparaison des séries à termes positifs, on sait donc que la série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge.



Remarque :

Dans ce cas de figure, on ne connaît pas la somme totale de la série, mais on sait néanmoins que

$$\sum_{n=N}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=N}^{+\infty} v_n$$

où N est le rang à partir duquel la propriété $0 \leq u_n \leq v_n$ est vérifiée. Ainsi, dans le cas de l'exemple précédent :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} (=1)$$



INDICE DE DÉPART

On prendra garde au changement de l'indice de départ. En effet, même si ça ne change pas la convergence, il se peut très bien que les premiers termes viennent compromettre l'inégalité.

■ Exemple 1:

En reprenant l'exemple précédent, posons pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad v_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 1 \\ \frac{1}{n(n-1)} & \text{sinon} \end{cases}$$

On a donc encore

$$0 \leq u_n \leq v_n \quad \forall n \geq 2$$

mais

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = -1 + \sum_{n=2}^{+\infty} v_n = 0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

On vient donc, en raison de l'introduction d'un seul terme, de renverser l'inégalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ alors que } \sum_{n=2}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=2}^{+\infty} v_n$$

- Si les termes sont négatifs

★ Première possibilité :

On pose $w_n = -u_n \geq 0$ et on travail sur w_n .

(Rappel : Les séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$ sont de même nature.)

★ Deuxième possibilité :

On tranpose l'énoncé aux séries à termes négatifs :

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que, à partir d'un certain rang, on a

i ■ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont **négatives**

ii ■ et $v_n \leq u_n \leq 0$.

alors :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge.}$$

Méthode 2:

Par équivalence du terme général

Rappel : Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que, à partir d'un certain rang, on a

i ■ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

ii ■ L'une au moins des séries est de signe constant

alors :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge.}$$

Montrer que la série $\sum \sin\left(\frac{1}{k^2}\right)$ converge.

Comme $\frac{1}{k^2} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$, on sait que

$$\sin\left(\frac{1}{k^2}\right) \sim \frac{1}{k^2} \geq 0$$

Or, on sait d'après l'exemple de la première méthode, que la série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge. Par équivalence du terme général, on conclut alors que $\sum \sin\left(\frac{1}{k^2}\right)$ converge.



CONFUSION AU NIVEAU DES ÉQUIVALENCES

D'une part, on ne connaît pas la somme totale de la série, et d'autre part, il n'y a a priori pas d'équivalence (et encore moins d'égalité!) entre les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. (On rappelle qu'on ne peut pas sommer des équivalents en général.)

I-2

Si les termes sont quelconques

Méthode 3:

En calculant explicitement les sommes partielles et en passant à la limite

Pour les détails, on se référera à la partie : "comment trouver la somme totale d'une série".

Méthode 4:

En démontrant la convergence absolue

Rappel : La convergence de $\sum |u_n|$ entraîne la convergence de $\sum u_n$.

Montrer la convergence de $\sum \left(\frac{1}{2^n} \cos n\right)$

$$0 \leq \left| \frac{1}{2^n} \cos n \right| \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On note que

Or, $\frac{1}{2^n}$ est le terme général d'une série convergente (série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1; 1[$.)

Ainsi, par le critère de comparaison des séries à termes positifs, on sait que la série $\sum \left| \frac{1}{2^n} \cos n \right|$ converge.

Pour finir, la convergence absolue entraînant la convergence, on en déduit la convergence de la série $\sum \left(\frac{1}{2^n} \cos n\right)$.



RÉCIPROQUE

La réciproque est fausse. En particulier, la divergence de $\sum |u_n|$ n'entraîne pas la divergence de $\sum u_n$.

Exemple 2:

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge et $\sum \frac{1}{n}$ diverge. (exemple classique)

★ Convergence de $\sum \frac{(-1)^n}{n}$:

En posant $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$, on montre facilement que S_{2n} et S_{2n+1} sont adjacentes.

Les sous-suites d'indice pairs et impairs de (S_n) convergeant vers la même limite, on a convergence de (S_n) .

★ Divergence de $\sum \left| \frac{(-1)^n}{n} \right|$:

En posant $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, on montre que $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$. Un raisonnement par l'absurde permet de conclure à une contradiction en cas de convergence (passage à la limite.)

II Comment trouver la somme totale d'une série convergente



Remarque :

Dans la plupart des cas, trouver la somme totale d'une série n'est pas facile. Ces méthodes ne s'appliquent donc qu'à un nombre (très) limité de situations.

Méthode 5:

Télescopage : écriture sous la forme $u_n = v_{n+1} - v_n$

La méthode peut être utilisée :

- soit pour établir la convergence d'une série (dans ce cas, on obtiendra également la somme totale)
- soit pour établir la divergence d'une série.

On écrit $u_n = v_{n+1} - v_n$. Alors

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0$$

Connaissant la convergence et la limite de (v_n) on en déduit celle de $\sum u_n$.

Montrer la convergence et calculer la somme totale de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$:

pour $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, on écrit

$$u_n = \underbrace{\frac{1}{n}}_{v_n} - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{v_{n+1}}.$$

Ainsi, par télescopage, on obtient

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n v_k - \sum_{k=1}^n v_{k+1} = \sum_{k=1}^n v_k - \sum_{k=2}^{n+1} v_k = v_1 - v_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Autrement dit, la série est convergente et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.



Remarque :

Cette méthode peut également être utilisée afin de démontrer la divergence d'une série (cf. Divergence d'une série.)



Remarque :

Toute suite peut s'écrire comme une série grâce au télescopage :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) + u_0$$

Méthode 6:

Décomposition suivant des exemples connus

Rappel : Les exemples connus sont :

- Les séries géométriques $\sum q^n$ et ses "dérivées" pour $|q| < 1$. avec

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad ; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad ; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^n = \frac{2}{(1-q)^3}$$

- Les séries exponentielles

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n+x^n}{e^n}$ soit convergente et déterminer la somme totale lorsque c'est possible.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\frac{n+x^n}{e^n} = \frac{n}{e} \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} + \left(\frac{x}{e}\right)^n$

On a $|\frac{1}{e}| < 1$, la série de type géométrique $\sum_{n \in \mathbb{N}} n \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$ est donc convergente, avec

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{e}}$$

D'autre part, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{x}{e}\right)^n$ est convergente si et seulement si $|x| < e$.

Dans ce cas, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{e}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{x}{e}} = \frac{e}{e-x}$$

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n+x^n}{e^n}$ est donc convergente ssi $|x| < e$, avec

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+x^n}{e^n} = \frac{1}{e-1} + \frac{e}{e-x}$$

III Comment déterminer la divergence d'une série

III-1 Si les termes sont de signe constant

Méthode 7:

Comparaison à une série divergente

Rappel : Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que, à partir d'un certain rang, on a

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont **positives**
- et $u_n \leq v_n$.

alors :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} v_n \text{ diverge.}$$

Montrons que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{n+1}{n(n-1)}$ diverge.

On constate aisément que $\frac{n+1}{n(n-1)} \geq \frac{1}{n} \geq 0$ pour tout entier $n \geq 2$. La divergence de la série $\sum \frac{1}{n}$ (cf. exemple de cours) permet de conclure.

Méthode 8:

Par équivalence du terme général

Rappel : Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que, à partir d'un certain rang, on a

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- L'une au moins des séries est de signe constant

alors :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n \text{ diverge} \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ diverge.}$$

Montrer que la série $\sum \sin\left(\frac{1}{k}\right)$ converge.

Comme $\frac{1}{k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$, on sait que $\sin\left(\frac{1}{k}\right) \sim \frac{1}{k} \geq 0$

Or, on sait d'après le cours, que la série $\sum \frac{1}{k}$ diverge. Par équivalence du terme général, on conclut alors que $\sum \sin\left(\frac{1}{k}\right)$ diverge.

III-2 Si les termes sont quelconques

Méthode 9:

Divergence grossière

Rappel : Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est une série convergente, alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Montrer que $\sum_{n \geq 0} \sin\left(\frac{n+1}{n}\right)$ diverge.

Clairement, on a

$$\sin\left(\frac{n+1}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sin 1 \neq 0$$

Il y a donc divergence grossière de la série.

Méthode 10:

Télescopage

On écrit $u_n = v_{n+1} - v_n$. Alors

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0$$

Connaissant la divergence de (v_n) on en déduit celle de $\sum u_n$.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge

pour $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, on a

$$u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$$

Ainsi, par télescopage, on obtient

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

IV Que faire si on me demande d'étudier la nature d'une série ?

Supposons que l'on me demande d'étudier la convergence d'une série $\sum u_n$.

- Etape 1 : Divergence grossière ?

Cette étape doit être systématique.

★ Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$ ou si (u_n) n'admet pas de limite, il y a divergence grossière. C'est fini.

★ Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, on ne peut rien dire et on passe à l'étape 2.

- Etape 2 : Décomposition en exemples fondamentaux ?

On essaie de voir si la série peut s'écrire comme somme de séries de convergence ou divergence connues. Si ce n'est pas possible, on passe à l'étape 3.

- Etape 3 : Télésopage ?

On tente de voir si on peut écrire u_n comme

$$u_n = v_{n+1} - v_n$$

ou,

$$u_n = a_n + b_n$$

avec $\sum a_n$ déjà connue et $b_n = v_{n+1} - v_n$.

Si c'est le cas, on téléscopie, sinon, on passe à l'étape 4 ou 5.

- Etape 4 : Si le terme général est de signe constant : équivalence ?

On tente de trouver un équivalent v_n du terme général u_n et on étudie la série obtenue $\sum v_n$. Si c'est une série connue, on peut conclure directement sur la nature de la série initiale. Sinon, il faut peut-être passer à l'étape 4bis avec la série simplifiée $\sum v_n$.

- Etape 4bis : Si le terme général est de signe constant : majoration ? minoration ?

On tente de majorer ou de minorer le terme général (ou celui d'un équivalent) par celui d'une série de convergence ou divergence déjà connue.

Si on y arrive, c'est fini, sinon, on ne peut a priori rien dire. Ainsi, soit la question sera plus détaillée, soit vous n'avez pas assez cherché...

- Etape 5 : Si le terme général n'est pas de signe constant : convergence absolue

On tente de majorer $|u_n|$ par le terme général d'une série convergente. Si on y arrive, c'est fini, il y a convergence. Sinon, on ne peut a priori rien dire. Ainsi, soit la question sera plus détaillée, soit vous n'avez pas cherché...